ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Простое движение. Постановка задачи преследования

В настоящем параграфе мы дадим определение простого движения точки на плоскости, обратив особое внимание на движение по ломаным с конечным числом вершин, которое будет использовано нами в дальнейшем; опишем две основные игры преследования на плоскости.

1.1. Простое движение. Пусть точка P начинает движение на плоскости из начального состояния (положения) x_0. Если отмечать ее текущие положения, то мы получим на плоскости некоторую непрерывную кривую, которая называется *траекторией движения.* Будем производить отсчет пройденного пути вдоль траектории от начальной точки x_0. Во всяком движении длина пути s, пройденного точкой P, зависит от времени. Это обстоятельство позволяет записать s как функцию времени: $s = s(t)$ (рис. 2). Если известен способ перемещения точки P по этой траектории, то можно установить формулу, определяющую *положения точки на траектории* в любой момент времени, т. е. *закон движения точки.*

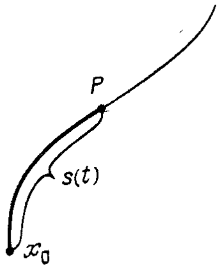


Рис. 2

Траектория движения точки P на плоскости может представлять собой как прямую, так и кривую линию. Соответственно этому движения разделяются на *прямолинейные и криволинейные.*

Простым движением называется такое движение, при котором расстояние, пройденное точкой P из начального состояния x_0, является линейной функцией времени:

$$s(t) = \rho t,$$

здесь t — время, в течение которого происходило движение, $s(t)$ — путь, пройденный точкой P из начального состояния x_0 за время t, а величина ρ, представляющая собой путь, проходимый точкой P в единицу времени, называется *линейной скоростью точки*. При простом движении величина ρ является постоянной и не зависит от времени.

Таким образом, простое движение точки P из начального местоположения x_0 на плоскости есть движение по любой криволинейной траектории, исходящей из этой точки, с постоянной линейной скоростью ρ. На рис. 3 изображены различные примеры простых движений из точки x_0.

Простое движение точки P может рассматриваться в выпуклом множестве S на плоскости, т. е. в процессе движения точка P не покидает множество S. Напомним,

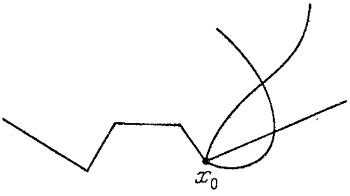


Рис. 3

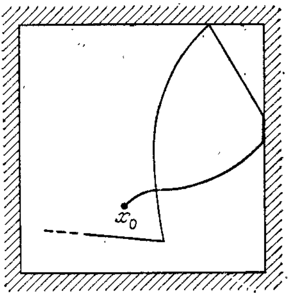
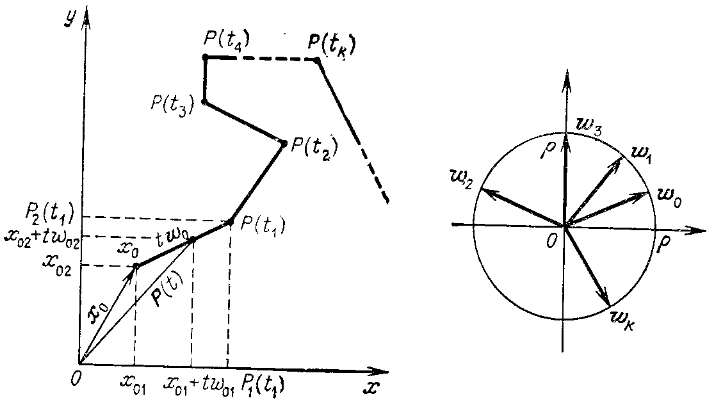


Рис. 4

что множество называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий две любые его точки, целиком содержится в этом множестве. На рис. 4 приведен пример простого движения точки P в квадрате.

1.2. Простое движение по ломаным. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать лишь подкласс простых движений, а именно всевозможные *движения по ломаным с конечным числом вершин*. Это означает, что мы будем предполагать в дальнейшем, что точка P, двигаясь с постоянной линейной скоростью ρ из начального положения x_0, может изменять направление своего движения лишь конечное число раз. Отметим, что любое простое движение может с достаточной степенью точности быть аппроксимировано (приближено) простым движением по ломаным с конечным числом вершин.

Изучим *закон движения* точки P по ломаным с конечным числом вершин. Предположим, что на плоскости введена ортогональная система координат xOy и в момент времени $t=0$ точка P находится в положении $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ (рис. 5, *а*). Пусть точка P в момент времени



а *б*

Рис. 5

$t=0$ начинает движение в некотором фиксированном направлении с постоянной линейной скоростью ρ. Это равносильно тому, что точка P, начиная с момента времени $t=0$, движется с некоторой постоянной вектор-скоростью $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, w_{02})$, $w_{01}^2 + w_{02}^2 = \rho^2$ (рис. 5, *б*).

Точка P, двигаясь с вектор-скоростью $\mathbf{w}_0$ в промежутке времени $[0, t]$, пройдет путь, длина которого равна

$$s = \rho t = \sqrt{w_{01}^2 + w_{02}^2} \cdot t = |\mathbf{w}_0|\, t = |t\mathbf{w}_0|,$$

где $|\mathbf{w}_0|$ — длина вектора $\mathbf{w}_0$. Если символом $P(t) = (P_1(t), P_2(t))$ обозначим положение точки P в момент $t \geqslant 0$, $P(0) = x_0$, то будем иметь (рис. 5, *а*)

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}_0$$

или в координатах

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = (x_{01} + tw_{01},\ x_{02} + tw_{02}). \qquad (1)$$

Таким образом, при движении точки P с вектор-скоростью $\mathbf{w}_0$ закон ее движения описывается уравнением (1).

Пусть в момент времени $t=t_1$ точка P изменяет направление своего движения и начинает перемещаться с постоянной вектор-скоростью $\mathbf{w}_1=(w_{11}, w_{12})$, $w_{11}^2+w_{12}^2=\rho^2$ (рис. 5, *б*). Точка P, продолжая движение с вектор-скоростью $\mathbf{w}_1$ из начального положения $P(t_1)$, в промежутке времени $[t_1, t]$, $t\geqslant t_1$, пройдет путь, длина которого равна $s=(t-t_1)\rho=|(t-t_1)\mathbf{w}_1|$. Тогда при $t\geqslant t_1$ имеем

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(t_1)+(t-t_1)\mathbf{w}_1$$

или в координатах

$$P(t)=(P_1(t), P_2(t))=$$
$$=(P_1(t_1)+(t-t_1)w_{11}, P_2(t_1)+(t-t_1)w_{12}). \qquad (2)$$

Если в формуле (2) учесть, что $P(t_1)=(x_{01}+t_1w_{01}, x_{02}+t_1w_{02})$ (см. (1)), то для точки $P(t)$ при $t\geqslant t_1$ получаем

$$P(t)=(P_1(t), P_2(t))=$$
$$=(x_{01}+t_1w_{01}+(t-t_1)w_{11}, x_{02}+t_1w_{02}+(t-t_1)w_{12}). \quad (3)$$

Таким образом, закон движения точки P на промежутке времени $[0, t_1]$ (t_1 — момент изменения направления движения точки P) описывается уравнением (1), а при $t\geqslant t_1$, когда P двигается с вектор-скоростью $\mathbf{w}_1$,— уравнением (3). Последующие изменения направлений движения точки P приводят нас к аналогичным формулам. Однако по предположению точка P может изменять направление движения лишь конечное число раз, поэтому, начиная с некоторого момента времени $t=t_k$, где k — некоторое натуральное число, точка P при всех $t\geqslant t_k$ будет перемещаться с некоторой постоянной вектор-скоростью

$$\mathbf{w}_k=(w_{k1}, w_{k2}), \qquad w_{k1}^2+w_{k2}^2=\rho^2.$$

Аналогично формулам (1), (3) можем получить

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(t_k)+(t-t_k)\mathbf{w}_k, \qquad t\geqslant t_k,$$

или в координатах

$$P(t)=(P_1(t), P_2(t))=$$
$$=(P_1(t_k)+(t-t_k)w_{k1}, P_2(t_k)+(t-t_k)w_{k2})=$$
$$=(x_{01}+t_1w_{01}+(t_2-t_1)w_{11}+\ldots+(t_k-t_{k-1})w_{k-1\,1}+$$
$$+(t-t_k)w_{k1}, x_{02}+t_1w_{02}+(t_2-t_1)w_{12}+\ldots$$
$$\ldots+(t_k-t_{k-1})w_{k-1\,2}+(t-t_k)w_{k2}), \qquad (4)$$

$\mathbf{w}_0=(w_{01}, w_{02})$, $\mathbf{w}_1=(w_{11}, w_{12})$, …, $\mathbf{w}_{k-1}=(w_{k-1\,1}, w_{k-1\,2})$,

$\mathbf{w}_i=(w_{i1}, w_{i2})$ — постоянные вектор-скорости, выбранные точкой P в моменты времени $0, t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответственно. Мы определили закон движения точки P вдоль ломаной с началом в точке $P(0)$ и с вершинами в точках $P(t_1)$, $P(t_2), \ldots, P(t_k)$. Таким образом, закон движения точки P по этой ломаной на отрезке времени $[0, t_1]$ описывается уравнением (1), где $\mathbf{w}_0=(w_{01}, w_{02})$, $w_{01}^2+w_{02}^2=\rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t=0$; на отрезке времени $[t_1, t_2]$ — уравнением (3), где $\mathbf{w}_1=(w_{11}, w_{12})$, $w_{11}^2+w_{12}^2=\rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t=t_1$, и т. д.; начиная с некоторого времени $t=t_k$ — уравнением (4), где $\mathbf{w}_k=(w_{k1}, w_{k2})$, $w_{k1}^2+w_{k2}^2=\rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t=t_k$.

Отметим, что движение точки P по ломаным с конечным числом вершин можно также рассматривать на любом конечном отрезке времени $[0, \theta]$.

1.3. Игра преследования с простым движением. Пусть на плоскости задано выпуклое множество S. Точки P_1, $P_2, \ldots, P_m$ и E перемещаются в S, обладая простым движением с постоянными линейными скоростями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ и σ соответственно*). Используя терминологию теории игр, совокупность точек $P_1, P_2, \ldots, P_m$ назовем *преследующим игроком* или *нарядом преследователей* P, а E — *убегающим игроком*. Движение наряда P и игрока E начинается в момент $t=0$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0)$, $E(0)$. Положения игроков P_1, $P_2, \ldots, P_m$, E в момент $t \geqslant 0$ обозначим соответственно $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_m(t)$ и $E(t)$.

Мы будем говорить, что наряд P *осуществил встречу* с E, если хотя бы один из преследователей P_i наряда P осуществил встречу с E, т. е. когда впервые положение E совпадает с положением хотя бы одного преследователя P_i из наряда P. *Преследование* нарядом P убегающего E начинается в момент времени $t=0$ и завершается, когда наряд P осуществляет встречу с E. *Потребуем*, чтобы в процессе движения все преследователи из наряда P и убегающей E *не покидали* множества S. *Целью наряда* P является встреча с убегающим E за минимальное время, а *цель убегающего* E — оттянуть момент встречи или избежать ее, если это возможно.

*) Как было отмечено в п. 1.2, здесь и всюду в дальнейшем рассматриваются только простые движения по ломаным с конечным числом вершин.

В каждый момент времени $t \geqslant 0$ игроку E известно свое положение и положение всех преследователей в этот же момент времени. Каждый преследователь P_i из наряда P в момент времени $t \geqslant 0$ знает положения всех членов наряда, включая себя, положение игрока E, а также направление движения игрока E в этот момент времени t, однако ему неизвестны будущие маневры E, т. е. P_i не знает, когда и как будет изменять игрок E направление своего движения в будущем.

Такую задачу преследования будем называть *игрой преследования с простым движением* и обозначать $\Gamma(m, 1; S)$, подчеркивая при этом зависимость от числа преследователей и вида множества S. В случае, когда S совпадает с плоскостью, такую игру обозначим $\Gamma(m, 1)$. При необходимости также будем использовать запись $\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_m, E; S)$ или $\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_m, E)$.

Конечное число θ назовем *оптимальным временем преследования в игре* $\Gamma(m, 1; S)$ относительно начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, $\ldots$, $P_m(0)$ и $E(0)$, если выполнены следующие условия:

а) для любых движений игрока E существует способ поведения наряда P, гарантирующий ему встречу с E не позже, чем за время θ;

б) существует такой способ поведения игрока E, что наряд P не может осуществить встречу с E до момента θ.

Если для конечного числа θ выполнено только условие а), то число θ назовем *гарантированным временем преследования* относительно начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, $\ldots$, $P_m(0)$ и $E(0)$, а если для конечного числа θ выполнено только условие б), то число θ назовем *гарантированным временем избежания* встречи относительно начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, $\ldots$, $P_m(0)$ и $E(0)$.

Пусть θ — оптимальное время преследования относительно положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, $\ldots$, $P_m(0)$ и $E(0)$. Тогда любой способ поведения убегающего E, при котором наряд P не может осуществить с ним встречу до момента θ (условие б)), назовем *оптимальной стратегией игрока E*. Способ поведения наряда P, при котором гарантируется встреча с E за время не позже, чем за время θ (условие а)), назовем *оптимальной стратегией наряда P*.

Под *решением игры* $\Gamma(m, 1; S)$ мы будем понимать нахождение оптимальной стратегии наряда P, оптимальной стратегии игрока E и оптимального времени преследования.

Мы будем говорить, что в игре $\Gamma(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ *возможно убегание*, если существует такой способ поведения убегающего E, что наряд P не может осуществить с ним встречу на любом конечном отрезке времени $[0, \theta]$. Это означает, что если перед началом игры E поставил перед собой задачу избежать встречи с нарядом P в течение любого конечного, но фиксированного заранее времени θ, то у него существует способ поведения, гарантирующий выполнение этой задачи при любых действиях наряда P.

1.4. Игра с «линией жизни». Пусть на плоскости задано выпуклое множество S, не совпадающее с плоскостью. Границу S обозначим буквой L и назовем *линией жизни*. Точки P_1, P_2, ..., P_m и E, т. е. наряд преследователей P и убегающий E, перемещаются в S, обладая простым движением с постоянными линейными скоростями ρ_1, ρ_2, ..., ρ_m и σ соответственно. Так же, как и в игре $\Gamma(m, 1; S)$, движение наряда P и убегающего E начинается в момент $t=0$ из положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$; предполагается, что игроки P и E в каждый момент времени $t \geqslant 0$ обладают той же информацией, что и в игре $\Gamma(m, 1; S)$. Цель наряда P — не допустить достижения границы — линии жизни L — игроком E до встречи с нарядом P. Цель убегающего E — достижение линии жизни L, при этом избегая встречи с P до момента достижения L. Такую задачу преследования с простым движением назовем *игрой с линией жизни* и будем обозначать $G(m, 1; S)$. Если для начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ существует способ поведения наряда P, гарантирующий достижение его цели при любых движениях E, то способ поведения назовем *оптимальной стратегией наряда* P и будем говорить, что в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ *выживание невозможно*. Это означает, что если в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ выживание невозможно, то оптимальная стратегия наряда P гарантирует встречу с убегающим E до достижения им линии жизни L.

Если для начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ существует способ поведения убегающего E, гарантирующий достижение его цели, то этот способ назовем *оптимальной стратегией* E и будем говорить, что в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений

$P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ *возможно выживание.* Это означает, что если в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ выживание возможно, то оптимальная стратегия E гарантирует ему достижение линии жизни L до встречи с P.

Упражнения

1. Пусть $P(0)=(0, 0)$ и $E(0)=(0, 1)$, а игроки P и E, начиная с момента времени $t=0$, перемещаются с постоянными вектор-скоростями $u=(2, 0)$, $v=(1, 0)$ соответственно. Найдите

а) закон движения точек P и E, т. е. формулу для положений $P(t)$ и $E(t)$ в каждый момент времени $t \geqslant 0$;

б) точку и момент встречи P с E.

2. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; S)$, где $\rho=2$, $\sigma=1$ и

$$S=\{(x, y):\ y=0\},$$

т. е. игроки P и E перемещаются в процессе игры лишь на оси абсцисс.

а) Докажите, что оптимальное время преследования в игре $\Gamma(1, 1; S)$ относительно начальных положений $P(0)=(0, 0)$ и $E(0)=(1, 0)$ равно $\theta=1$. Оптимальная стратегия для P — перемещение с вектор-скоростью $\mathbf{u}=(2, 0)$, для E — перемещение с вектор-скоростью $\mathbf{v}=(1, 0)$.

б) Найдите решение игры $\Gamma(1, 1; S)$ относительно начальных положений $P(0)=(a, 0)$ и $E(0)=(b, 0)$, $a \neq b$.

3. Рассмотрим игру $G(1, 1; S)$, где $\rho=2$, $\sigma=1$ и

$$S=\{(x, y):\ -2 \leqslant x \leqslant 2,\ y=0\}$$

с линией жизни $L=\{(-2, 0), (2, 0)\}$, состоящей из двух точек.

а) Если $P(0)=(0, 0)$, то укажите множество всех начальных положений $E(0)$, из которых в игре $\Gamma(1, 1; S)$ возможно выживание.

б) Рассмотрим игру $G(1, 1; S)$ относительно начальных положений $P(0)=(a, 0)$, $-2 \leqslant a \leqslant 2$, и $E(0)=(b, 0)$, $-2 \leqslant b \leqslant 2$. Определите, при каких значениях параметров a, b возможно выживание.

§ 2. Множество достижимости, окружность и точка Аполлония

В этом параграфе будем предполагать, что S совпадает с плоскостью и наряд P состоит из одного преследователя P.

2.1. Множество достижимости. Пусть преследователь P перемещается на плоскости в соответствии с простым движением с постоянной линейной скоростью $\rho > 0$.

Множество всех точек $z=(x, y)$ на плоскости, в которых может оказаться игрок P в момент времени t, используя всевозможные движения по ломаным с конечным числом вершин, начиная движение в момент $t=0$ из точки $P(0)$, назовем *множеством достижимости игрока P к моменту t*. Обозначим $H(A;\ R)$ $(S(A;\ R))$ круг (окружность) с центром в точке A и радиусом R (см. список обозначений).

Справедлива следующая

Лемма 1. *Множество достижимости игрока P к моменту $t \geqslant 0$ образует круг с центром в точке $P(0)$ и с радиусом ρt.*

Доказательство. а) Пусть $z \in S(P(0);\ \rho t)$, т. е. z лежит на границе круга $H(P(0);\ \rho t)$ (рис. 6, *а*). Тогда P может оказаться в точке z, двигаясь по полупрямой

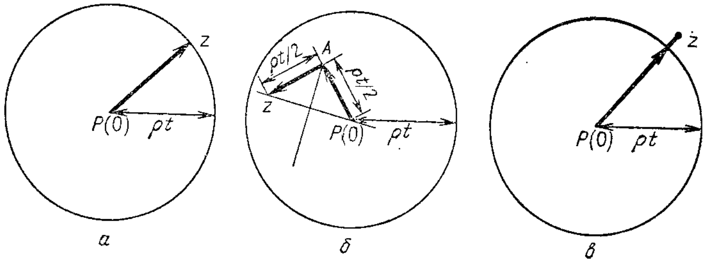


Рис. 6

$\overrightarrow{[P(0),\ z)}$ (см. список обозначений), поскольку по полупрямой $\overrightarrow{[P(0),\ z)}$ можно двигаться только в направлении $\overrightarrow{P(0)z}$, и длина пути, пройденного за время t с постоянной линейной скоростью ρ, равна $s(t)=\rho t=|P(0)z|$.

б) Пусть $z \in H(P(0);\ \rho t) \setminus S(P(0);\ \rho t)$, т. е. z — внутренняя точка круга $H(P(0);\ \rho t)$. В этом случае существует достаточно много ломаных с конечным числом вершин, двигаясь по которым, P может оказаться в точке z

в момент времени t. Ограничимся лишь указанием одновершинной ломаной. Для этого проведем серединный перпендикуляр к отрезку $[P(0),\ z]$ (рис. 6, *б*) и на нем отметим такую точку A, что $|P(0)A| = \rho t/2$. Очевидно, что $A \in H(P(0);\ \rho t)$. Игрок P может попасть в точку z в момент t, перемещаясь до момента времени $t/2$ по полупрямой $\overrightarrow{[P(0),\ A)}$, затем в течение такого же времени — по полупрямой $\overrightarrow{[A,\ z)}$.

в) Пусть $z \notin H(P(0);\ \rho t)$, т. е. точка z лежит вне круга $H(P(0);\ \rho t)$ (рис. 6, *в*). Так как игрок P за время t может пройти лишь путь, длина которого равна ρt, и $\rho t < |P(0)z|$, то очевидно, что P не может оказаться в точке z в момент времени t.

Лемма доказана.

2.2. Окружность и точка Аполлония. Пусть преследователь P и убегающий E перемещаются на плоскости в соответствии с простым движением с постоянными линейными скоростями ρ и σ, $\rho > \sigma > 0$, и в начале игры

$$|P(0)E(0)| = b > 0.$$

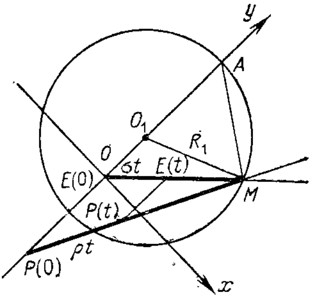


Рис. 7

Предположим, что игрок E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0),\ B)}$ (рис. 7). Пусть игрок P, зная это направление движения игрока E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[P(0),\ C)}$, обеспечивая встречу с E в точке M. Тогда должно выполняться равенство

$$\frac{|E(0)M|}{\sigma} = \frac{|P(0)M|}{\rho}, \text{ или } \rho\,|E(0)M| = \sigma\,|P(0)M|. \qquad (5)$$

Для различных полупрямых $\overrightarrow{[E(0),\ B)}$ получаем различные точки встречи M, удовлетворяющие (5).

Лемма 2. *Геометрическое место точек $M = (x,\ y)$, удовлетворяющих уравнению (5), является окружностью.*

Доказательство. На плоскости выберем систему координат xOy таким образом, чтобы $E(0) = (0,\ 0)$,

$P=(0, -b)$. Тогда

$$|E(0)M| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |P(0)M| = \sqrt{x^2+(y+b)^2};$$

подставляя в (5), получаем

$$\rho\sqrt{x^2+y^2} = \sigma\sqrt{x^2+(y+b)^2}. \tag{6}$$

Возведя в квадрат обе стороны уравнения (6), получим

$$\rho^2(x^2+y^2) = \sigma^2[x^2+(y+b)^2],$$

$$(\rho^2-\sigma^2)x^2+(\rho^2-\sigma^2)y^2-2b\sigma^2 y = b^2\sigma^2,$$

$$x^2+y^2-2\cdot\frac{b\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}\cdot y+\frac{b^2\sigma^4}{(\rho^2-\sigma^2)^2} = \frac{b^2\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}+\frac{b^2\sigma^4}{(\rho^2-\sigma^2)^2},$$

$$x^2+\left(y-\frac{b\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma\rho b}{\rho^2-\sigma^2}\right)^2. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что геометрическое место точек $M=(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (1), является окружностью $S(O_1; R_1)$, где

$$O_1 \in [P(0), E(0)), \tag{8}$$

$$|E(0)O_1| = \frac{\sigma^2|P(0)E(0)|}{\rho^2-\sigma^2} = \frac{\sigma^2 b}{\rho^2-\sigma^2}, \tag{9}$$

$$|P(0)O_1| = |P(0)E(0)|+|E(0)O_1| = \frac{\rho^2|P(0)E(0)|}{\rho^2-\sigma^2} = \frac{\rho^2 b}{\rho^2-\sigma^2}, \tag{10}$$

$$R_1 = \frac{\rho\sigma|P(0)E(0)|}{\rho^2-\sigma^2} = \frac{\rho\sigma b}{\rho^2-\sigma^2}. \tag{11}$$

Лемма доказана.

Окружность $S(O_1; R_1)$ была известна математикам древнего мира и называется *окружностью Аполлония*, соответствующей положениям $P(0)$ и $E(0)$. Наиболее удаленную от $E(0)$ точку M на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$ назовем *точкой Аполлония* и обозначим $A(P(0), E(0))$. Круг $H(O_1; R_1)$ назовем *кругом Аполлония*.

Лемма 3. $A(P(0), E(0)) = S(O_1; R_1)\cap[P(0), E(0))$.

Доказательство. Пусть M — точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, отличная от точки $A = S(O_1; R_1)\cap[P(0), E(0))$ (рис. 7). Треугольник O_1MA равнобедренный, так как $|O_1M| = |O_1A| = R_1$. Отсюда для треугольника $E(0)MA$ имеем

$$\angle E(0)AM < \angle E(0)MA,$$

следовательно,

$$|E(0)M| < |E(0)A|,$$

т. е. A — точка на окружности Аполлония $S(O_1;\ R_1)$, наиболее удаленная от E_0. Лемма доказана.

Из формул (9) и (11) следует, что

$$|E(0)A| = |E(0)O_1| + R_1 = \frac{\sigma\,|P(0)E(0)|}{\rho - \sigma} = \frac{\sigma b}{\rho - \sigma}. \quad (12)$$

Приведем некоторые свойства точки и окружности Аполлония.

Лемма 4. *Пусть M — некоторая точка на окружности Аполлония $S(O_1;\ R_1)$ и игроки P и E перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{[P(0),\ M)}$ и $\overrightarrow{[E(0),\ M)}$, соответственно. Тогда для каждого t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$, отрезок $[P(t),\ E(t)]$ параллелен отрезку $[P(0),\ E(0)]$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$. Тогда для положений $P(t)$ и $E(t)$ имеем (рис. 7)

$$|E(0)E(t)| = \sigma t, \qquad |P(0)P(t)| = \rho t. \quad (13)$$

Рассмотрим $\triangle P(0)ME(0)$ и $\triangle P(t)ME(t)$. Из формул (5) и (13) имеем

$$\frac{|E(0)M|}{|P(0)M|} = \frac{|E(0)E(t)|}{|P(0)P(t)|} = \frac{\sigma}{\rho},$$

откудa (14)

$$\frac{|E(0)M| - |E(0)E(t)|}{|P(0)M| - |P(0)P(t)|} = \frac{|E(t)M|}{|P(t)M|} = \frac{\sigma}{\rho}.$$

Из формул (14) получим, что $\triangle P(0)ME(0) \backsim \triangle P(t)ME(t)$ (так как угол $\angle P(0)ME(0)$ общий для обоих треугольников). Следовательно, отрезок $[P(0),\ E(0)]$ параллелен отрезку $[P(t),\ E(t)]$ при любом t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть M — некоторая точка на окружности Аполлония $S(O_1;\ R_1)$ и игрок E перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0),\ M)}$. Тогда преследователь P не может осуществить встречу с E до момента времени $|E(0)M|/\sigma$, т. е. $|E(0)M|/\sigma$ — наименьшее время, за которое P может осуществить встречу с E.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$. Игрок E в момент времени t оказывается в положении $E(t)$, $|E(0)E(t)| = \sigma t$ (рис. 8). Из леммы 1 имеем, что при любом способе перемещения игрока P точка $P(t) \in H(P(0);\ \rho t)$. Обозначим $P' = S(P(0);\ \rho t)) \cap [P(0)M)$. Треугольник $P(0)P'E(t)$ тупоугольный. Действительно, отрезок $[P(0),\ E(0)]$ параллелен отрезку $[P(t),\ E(t)]$ (см. лемму 4), поэтому

$$\angle E(0)P(0)P' + \angle P(0)P'E(t) = 180°$$

и $\angle E(0)P(0)P' < 90°$. Отсюда получим, что в треугольнике $P(0)P'E(t)$

$$\rho t = |P(0)P'| < |P(0)E(t)|. \qquad (15)$$

Из (15) имеем, что $E(t) \notin H(P(0);\ \rho t)$, следовательно, игрок P при любом способе перемещения не может оказаться в момент времени t в точке $E(t)$.

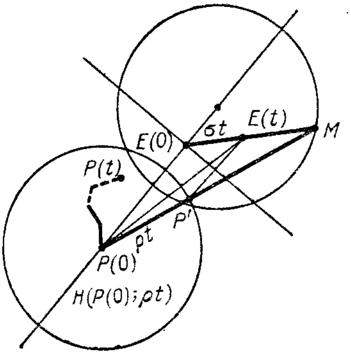


Рис. 8

Таким образом, если игрок E перемещается по $\overrightarrow{[E(0),\ M)}$, то игрок P не может осуществить встречу с E за время t, где $t < |E(0)M|/\sigma$.

С другой стороны, из определения окружности Аполлония следует, что если P будет перемещаться по полупрямой $\overrightarrow{[P(0),\ M)}$, то встреча с E произойдет в момент времени $|E(0)M|/\sigma$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $S(O_1;\ R_1)$ — *окружность*, $A = A(P(0),\ E(0))$ — *точка Аполлония. Тогда*

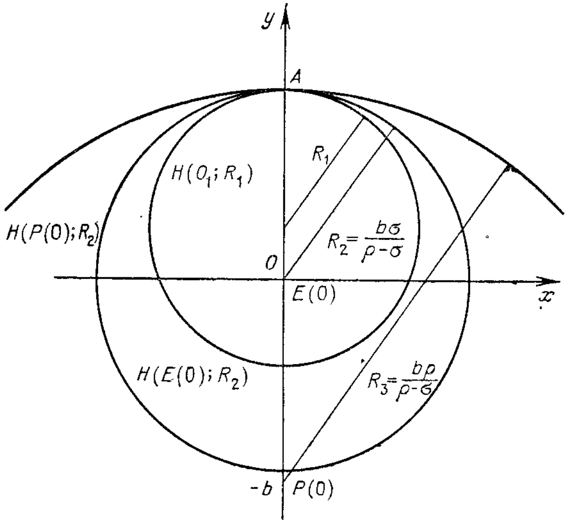
а) *окружности* $S(O_1;\ R_1)$, $S\left(E(0);\ \frac{b\sigma}{\rho-\sigma}\right)$ *и* $S\left(P(0);\ \frac{b\rho}{\rho-\sigma}\right)$ *касаются в одной точке* A;

б) $H(O_1;\ R_1) \subset H\left(E(0);\ \frac{b\sigma}{\rho-\sigma}\right) \subset H\left(P(0);\ \frac{b\rho}{\rho-\sigma}\right)$;

в) *момент времени* $t = \frac{b}{\rho-\sigma}$ *является наименьшим моментом времени* $t \geqslant 0$, *для которого выполнено включение*

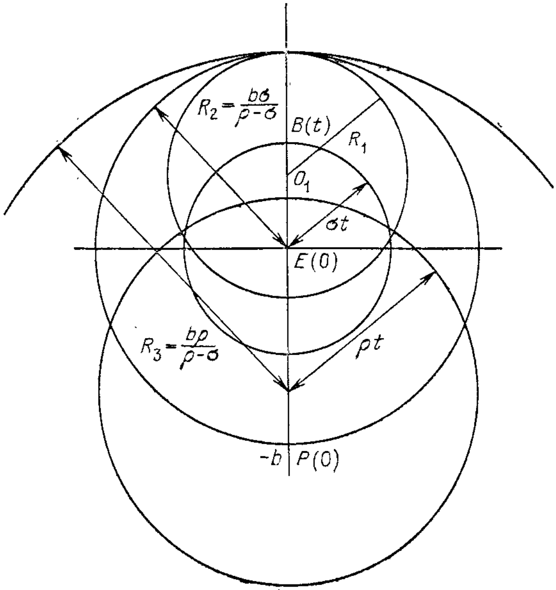
$$H(E(0);\ \sigma t) \subset H(P(0),\ \rho t). \qquad (16)$$

Доказательство. Утверждения а) и б) непосредственно следуют из определения точек O_1, A и радиуса R_1 (см. (8)—(12) и рис. 9).



y
A
R_1
$H(O_1; R_1)$
$H(P(0); R_2)$
$R_2 = \frac{b\sigma}{\rho-\sigma}$
0
$E(0)$
x
$H(E(0); R_2)$
$R_3 = \frac{b\rho}{\rho-\sigma}$
$-b$
$P(0)$

Рис. 9



$R_2 = \frac{b\sigma}{\rho-\sigma}$
$B(t)$
R_1
O_1
σt
$E(0)$
$R_3 = \frac{b\rho}{\rho-\sigma}$
ρt
$-b$
$P(0)$

Рис. 10

в) Из утверждения б) следует, что при $t = b/(\rho - \sigma)$ соотношение (16) выполнено. Зафиксируем t,

$$0 \leqslant t < \frac{b}{\rho - \sigma}. \qquad (17)$$

Тогда из формулы (17) имеем

$$(\rho - \sigma) t < b, \quad \rho t < b + \sigma t. \qquad (18)$$

Рассмотрим точку $B(t) \in H(E(0); \sigma t)$ (рис. 10) такую, что

$$B(t) \in [E(0), O_1), \quad |E(0) B(t)| = \sigma t. \qquad (19)$$

Тогда из формул (18), (19) получим

$$|P(0) B(t)| = |P(0) E(0)| + |E(0) B(t)| = b + \sigma t > \rho t.$$

Отсюда

$$B(t) \notin H(P(0); \rho t),$$

т. е. для любого момента времени t, $0 \leqslant t < \frac{b}{\rho - \sigma}$, существует точка $B(t) \in H(E(0); \sigma t)$ и $B(t) \notin H(P(0); \rho t)$, т. е. соотношение (16) не выполнено. Лемма доказана.

Л е м м а 7. *Пусть M — точка на окружности Аполлония $S(O_1, R_1)$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{[P(0), M)}$ и $\overrightarrow{[E(0), M)}$ соответственно. Тогда окружность Аполлония, соответствующая какой-либо паре промежуточных положений $P(t)$ и $E(t)$, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$, касается окружности $S(O_1; R_1)$ в точке M.*

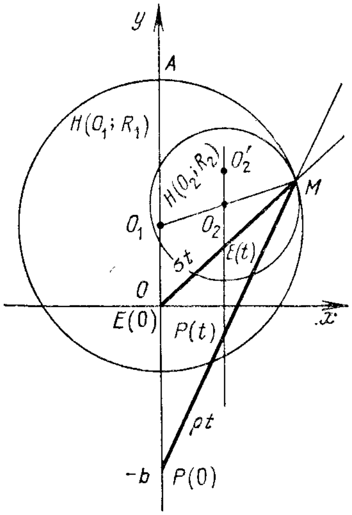


Рис. 11

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем t, $0 < t < |E(0), M|/\sigma$. Пусть $S(O_2'; R_2)$ — окружность Аполлония, соответствующая положениям $P(t)$ и $E(t)$. Обозначим $O_2 = (P(t), E(t)) \cap (O_1, M)$ (рис. 11). Из формул (8)—(12) имеем $O_2' \in [P(t), E(t))$,

$$|E(t) O_2'| = \frac{\sigma^2 |P(t) E(t)|}{\rho^2 - \sigma^2}, \quad |P(t) O_2'| = \frac{\rho^2 |P(t) E(t)|}{\rho^2 - \sigma^2}, \qquad (20)$$

$$R_2 = \frac{\rho\sigma |P(t) E(t)|}{\rho^2 - \sigma^2}. \qquad (21)$$

Учитывая, что $|P(t)E(t)|>0$ при $0<t<|E(0)M|/\sigma$, из формулы (20) получим

$$\frac{|E(0)O_2'|}{|P(t)E(t)|}=\frac{\sigma^2|P(t)E(t)|}{(\rho^2-\sigma^2)|P(t)E(t)|}=\frac{\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}. \qquad (22)$$

Из формулы (9) и учитывая, что $|P(0)E(0)|=b$, имеем

$$\frac{|E(0)O_1|}{|P(0)E(0)|}=\frac{b\sigma^2}{(\rho^2-\sigma^2)b}=\frac{\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}. \qquad (23)$$

Поскольку $(P(0),\ E(0))\|(P(t),\ E(t))$ (см. лемму 4), из формулы (23) и теоремы Фалеса следует

$$\frac{|E(0)O_1|}{|P(0)E(0)|}=\frac{|E(t)O_2|}{|P(t)E(t)|}=\frac{\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}.$$

Отсюда и из формулы (22) получаем, что $O_2=O_2'$, т. е. $O_2'\in[O_1,\ M]$. Треугольники $E(0)MO_1$ и $E(t)MO_2$ подобны, следовательно,

$$\frac{|O_2M|}{|E(t)O_2|}=\frac{|O_1M|}{|E(0)O_1|}; \qquad (24)$$

отсюда и из формул (9), (11), (20), (21) получим

$$|O_2M|=\frac{|E(t)O_2|\cdot|O_1M|}{|E(0)O_1|}=\frac{\rho\sigma|P(t)E(t)|}{\rho^2-\sigma^2}=R_2. \qquad (25)$$

Так как $O_2\in[O_1,\ M]$, из формулы (25) следует, что окружности $S(O_1;\ R_1)$ и $S(O_2;\ R_2)$ касаются в точке M. Отсюда также следует, что

$$H(O_2;\ R_2)\subset H(O_1;\ R_1). \qquad (26)$$

Лемма доказана.

Упражнения

4. Пусть $P(0)\in S$ — некоторое выпуклое множество на плоскости и в процессе движения с постоянной линейной скоростью $\rho>0$ точка P не может покинуть множество S. Доказать, что в этом случае множество достижимости игрока P из начального положения $P(0)$ к моменту времени t имеет вид

$$S\cap H(P(0);\ \rho t). \qquad (27)$$

5. Пусть $H(P(0);\ \rho t)$ — множество достижимости игрока P к моменту времени t (лемма 1), точка $M\in\in S(P(0);\ \rho t)$ и игрок P, начиная с момента времени

$t=0$, перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[P(0),\ M)}$. Рассмотрим множество достижимости $H(P(t_1);\ \rho(t-t_1))$, где $0<t_1<t$, т. е. множество достижимости игрока P из начального положения $P(t_1)$ к моменту времени t (за время $t-t_1$). Доказать справедливость следующего соотношения:

$$M \in H(P(t_1);\ \rho(t-t_1)) \subset H(P(0);\ \rho t). \qquad (28)$$

6. Пусть $S(O_1;\ R_1)$ и A — окружность и точка Аполлония, соответствующие начальным положениям $P(0)$ и $E(0)$. Доказать, что A — точка на окружности $S(O_1;\ R_1)$, наиболее удаленная от точки $P(0)$.

7. Пусть игрок P перемещается на плоскости с постоянной линейной скоростью $\rho>0$, $t>0$ и $z \in H(P(0);\ \rho(t)) \setminus S(P(0);\ \rho t)$ (см. доказательство леммы 1, утверждения б)). Рассмотрим некоторую одновершинную ломаную $[P(0),\ A,\ z]$ такую, что игрок P, перемещаясь до момента времени $|P(0)A|/\rho$ по полупрямой $\overrightarrow{[P(0),\ A)}$, а затем, перемещаясь по полупрямой $\overrightarrow{[A,\ z)}$, в момент времени t оказывается в точке z. Зафиксируем точку z и рассмотрим множество всех таких одновершинных ломаных $[P(0),\ A,\ z]$. Найти геометрическое место точек A.

8. Пусть $\rho>\sigma>0$, $S(O_1;\ R_1)$ и $A(P(0);\ E(0))$ — точка и окружность Аполлония, соответствующие положениям $P(0)$ и $E(0)$, M — точка на окружности $S(O_1;\ R_1)$, отличная от $A(P(0),\ E(0))$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t=0$, перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{[P(0),\ M)}$ и $\overrightarrow{[E(0),\ M)}$ соответственно. Найти геометрическое место точек Аполлония, соответствующих всем промежуточным положениям $P(t)$ и $E(t)$, $0 \leqslant t \leqslant |E(0)M|/\sigma$.

9. Пусть $\rho>\sigma>0$, M — точка на окружности Аполлония $S(O_1;\ R_1)$, соответствующей положениям $P(0)$ и $E(0)$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t=0$, перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{[P(0),\ M)}$ и $\overrightarrow{[E(0),\ M)}$ соответственно, а $S(O_2;\ R_2)$ и A_1 — окружность и точка Аполлония, соответствующие некоторой паре промежуточных положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant |E(0)M|/\sigma$.

Доказать неравенство

$$|E(0)E(t_1)| + |E(t_1)A_1| \leqslant |E(0)A|, \qquad (29)$$

где A — точка Аполлония, соответствующая положениям $P(0)$ и $E(0)$.

§ 3. Стратегия параллельного сближения

Пусть преследователь P и убегающий E перемещаются на плоскости в соответствии с простым движением с постоянными линейными скоростями ρ и σ, $\rho \geqslant \sigma > 0$. Систему координат на плоскости выберем таким образом, чтобы в момент времени $t = 0$ игроки P и E находились

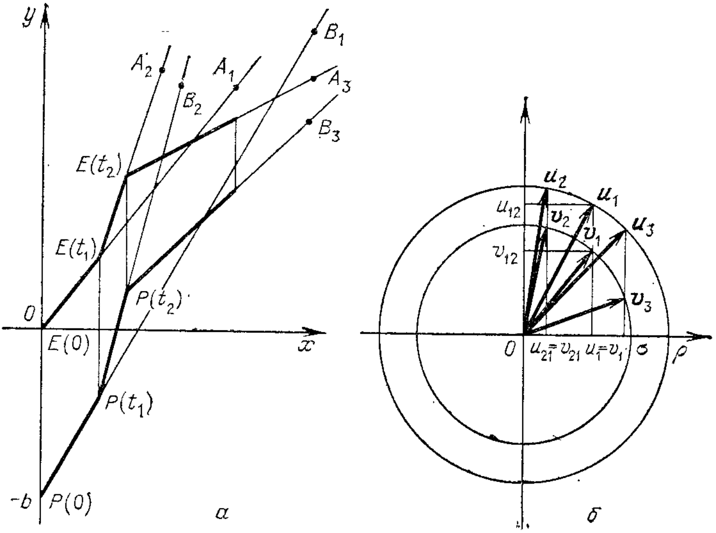


Рис. 12

в положениях $P(0) = (0, -b)$ и $E(0) = (0, 0)$, где $b = |P(0)E(0)| > 0$. Укажем для игрока P один способ преследования игрока E.

Пусть игрок E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), A_1)}$ (рис. 12, *а*), т. е. с вектор-скоростью $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$, $v_{11}^2 + v_{12}^2 = \sigma^2$ (рис. 12, *б*). По условию игры в момент времени $t = 0$ игрок P знает $P(0)$, $E(0)$ и $\overrightarrow{[E(0), A_1)}$, т. е. вектор-скорость $\mathbf{v}_1$. Пока E перемещается с вектор-скоростью $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$, предпишем для P, начиная с момента времени $t = 0$, движение с вектор-скоростью

$$\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{12}) = \left(v_{11}, \sqrt{\rho^2 - v_{11}^2}\right), \tag{30}$$

т. е. по полупрямой $[\overrightarrow{P(0), B_1})$, $\overrightarrow{P(0)B_1} \uparrow\uparrow \mathbf{u}_1$ (см. список обозначений).

Пусть в момент времени $t = t_1 > 0$ игрок E решил изменить направление своего движения и начал перемещаться по некоторой полупрямой $[\overrightarrow{E(t_1), A_2})$, т. е. с вектор-скоростью $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}), v_{21}^2 + v_{22}^2 = \sigma^2$, при этом предположим, что на промежутке времени $[0, t_1]$ встреча P с E не произошла. Тогда, начиная с момента времени $t = t_1$, игроку P предпишем движение с вектор-скоростью

$$\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22}) = \left(v_{21}, \sqrt{\rho^2 - v_{21}^2}\right), \tag{31}$$

т. е. по полупрямой $[\overrightarrow{P(0), B_2})$, $\overrightarrow{P(0)B_2} \uparrow\uparrow \mathbf{u}_2$.

Если игрок E в некоторый момент времени $t_2 > t_1$ вновь изменяет направление движения, то игрок P изменяет направление своего движения описанным выше способом, и т. д.

При таком способе преследования игроком P игрока E для всех $t \geqslant 0$ (до момента встречи P с E) отрезок $[P(t), E(t)]$ параллелен отрезку $[P(0), E(0)]$. Действительно, при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ из формул (30) и (31) для $P(t) = (P_1(t), P_2(t))$ и $E(t) = (E_1(t), E_2(t))$ имеем (см. (1))

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t)) = (tv_{11}, tv_{12}),$$

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = \left(tv_{11}, t\sqrt{\rho^2 - v_{11}^2} - b\right),$$

т. е. $P_1(t) = E_1(t)$ при всех $0 \leqslant t \leqslant t_1$, следовательно, отрезок $[P(t), E(t)]$ параллелен отрезку $[P(0), E(0)]$ на этом промежутке времени. В частности, $[P(0), E(0)] \parallel [P(t_1), E(t_1)]$. Однако на отрезке $[t_1, t_2]$ $u_{21} = v_{21}$, или, что то же, $E_1(t) = P_1(t)$, следовательно, $[P(t), E(t)] \parallel [P(t_1), E(t_1)] \parallel [P(0), E(0)]$. При $t > t_2$ доказательство проводится аналогично.

Такой способ преследования игроком P убегающего E назовем *стратегией параллельного сближения* или *П-стратегией*. На рис. 13, *а*, *б* в случаях $\rho > \sigma$ и $\rho = \sigma$ соответственно указаны примеры траекторий игрока P при применении им П-стратегии.

Следующая лемма в случае $\rho > \sigma$ устанавливает связь П-стратегии с окружностью Аполлония $S(O_1; R_1)$, соответствующей положениям $P(0) = (0, -b)$ и $E(0) = (0, 0)$.

Лемма 8. *Пусть $\rho > \sigma$, M — некоторая точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$ и игрок E перемещает-*

ся по полупрямой $[\overrightarrow{E(0),\ M})$. *Тогда* П-*стратегия предписывает для* P *движение по полупрямой* $[\overrightarrow{P(0),\ M})$.

Доказательство. Перемещение игрока E по полупрямой (рис. 14, *а*) означает, что он двигается с

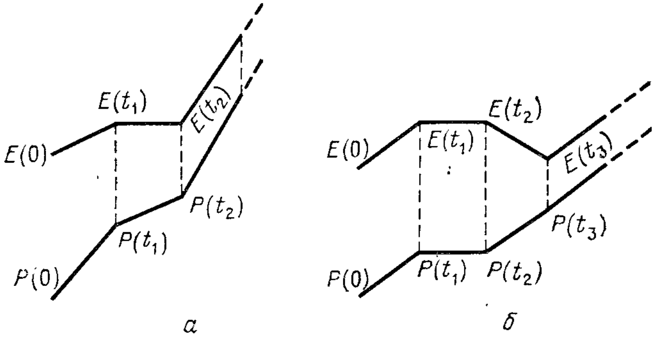


Рис. 13

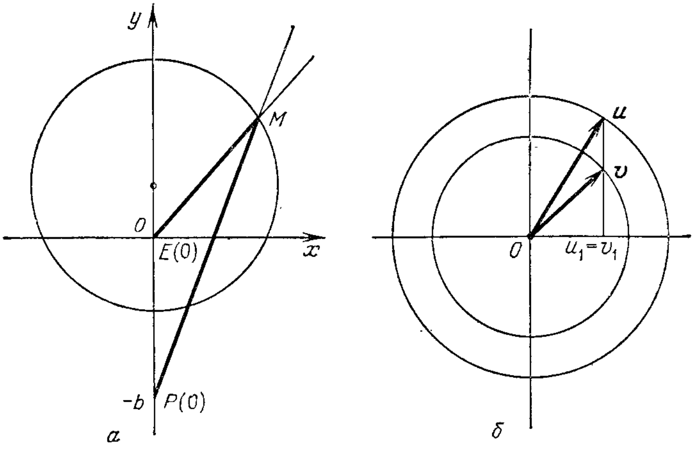


Рис. 14

вектор-скоростью (рис. 14, *б*)

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \qquad v_1^2 + v_2^2 = \rho^2, \tag{32}$$

$\mathbf{v} \uparrow\uparrow \overrightarrow{E(0)M}$. Тогда П-стратегия предписывает для игрока P движение с вектор-скоростью

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = \left(v_1, \sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right). \tag{33}$$

Из формул (32) и (33) для $P(t)$ и $E(t)$ при $t \geqslant 0$ имеем

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t)) = (tv_1, tv_2), \tag{34}$$

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = \left(tv_1, -b + t\sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right). \tag{35}$$

Определим момент времени $t > 0$, при котором происходит встреча P с E, т. е. $P(t) = E(t)$. Для этого достаточно выполнения равенства

$$P_2(t) = E_2(t), \tag{36}$$

поскольку из (34) и (35) имеем $P_1(t) = E_1(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Воспользуясь (34) и (35), уравнение (36) можно переписать в виде

$$tv_2 = -b + t\sqrt{\rho^2 - v_1^2},$$

откуда

$$t_1 = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2}. \tag{37}$$

Из неравенств

$$\rho^2 > \sigma^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

$$\rho^2 - v_1^2 > v_2^2,$$

$$\sqrt{\rho^2 - v_1^2} > |v_2| \geqslant v_2$$

следует, что в формуле (37) знаменатель

$$\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2 > 0. \tag{38}$$

Подставляя (37) в (34) и (35), получим, что встреча P и E происходит в точке

$$P(t_1) = E(t_1) = \left(\frac{bv_1}{\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2}, \frac{bv_2}{\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2}\right). \tag{39}$$

Легко убедиться, что точка, определяемая формулой (39), лежит на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, т. е. координаты точки (39) удовлетворяют уравнению (см. (7))

$$x^2 + \left(y^2 - \frac{b\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma\rho b}{\rho^2 - \sigma^2}\right)^2. \tag{40}$$

Таким образом, если E перемещается по $\overrightarrow{[E(0), M)}$, а P применяет П-стратегию, то встреча с E произойдет на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, т. е. П-стратегия предписывает для P движение по $\overrightarrow{[P(0), M)}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $\rho > \sigma \geqslant 0$; *тогда для любого* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $v_1^2 + v_2^2 = \sigma^2$, *имеет место неравенство*

$$\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2 \geqslant \rho - \sigma. \tag{41}$$

Доказательство. Умножим обе стороны неравенства (41) на $\sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2 > 0$ (см. (38)):

$$\left(\sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right)^2 - v_2^2 \geqslant (\rho - \sigma)\left(\sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2\right),$$

$$\rho^2 - v_1^2 - v_2^2 \geqslant (\rho - \sigma)\left(\sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2\right),$$

$$\rho + \sigma \geqslant \sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2.$$

Последнее неравенство справедливо для любого $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $v_1^2 + v_2^2 = \sigma^2$, поскольку

$$\rho \geqslant \sqrt{\rho^2 - v_1^2}, \quad \sigma \geqslant |v_2| \geqslant v_2.$$

Лемма доказана.

Упражнения

10. Проверить, что точка, определяемая формулой (39), удовлетворяет уравнению (40).

11. Пусть $\rho > \sigma > 0$ и игроки P и E в момент времени $t = 0$ находятся в положениях $P(0) = (0, 0)$ и $E(0) = (a, 0)$, $a > 0$. Определить закон движения точки P в следующих двух случаях:

а) E движется по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), E(0))}$, а P использует П-стратегию;

б) E движется по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), P(0))}$, а P использует П-стратегию.

12. Пусть $\rho > \sigma > 0$, E перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$, а P использует П-стратегию, перемещаясь при этом по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), N)}$. Доказать, что всегда

$$\angle E(0)P(0)N < 90°.$$